数理解析研究所講究録
906巻 1995年 126-131

周期1と2のリミットサイクルをもつセルオートマトンについて

井口修一*　　河原康雄‡
Syuichi INOKUCHI†　　Yasuo KAWAHARA§

要旨

256ある遷移規則のうち，0-0型境界条件で周期1と2のリミットサイクルを同時にもつセルオートマトンについて，リミットサイクルとその個数，transient length に着目し解析した結果のみを述べる．

1 はじめに

3近傍局所遷移規則をもつ有限セルオートマトンには，境界条件が巡回型のものと，固定型のものなどがあり，固定型には0-0型，0-1型，1-0型，1-1型の4種類がある．3近傍局所遷移規則のうち線形な遷移規則をもつ，0-0型有限セルオートマトンについては，線形代数的手法を用いることにより，かなり詳しくその挙動が解析されている [2, 3]．しかし，非線形な遷移規則をもつ有限セルオートマトンについては，かなり複雑な挙動をするものもあり，あまりその挙動は解析されていない．そこで，固定型の境界条件をもつ有限セルオートマトンの挙動のうち，リミットサイクルの周期，その個数，transient length に着目し，解析することにした．本稿では，0-0型有限セルオートマトンにおいて周期1と2のリミットサイクルをもつものについて解析した [5]．

*九州大学大学院総合理工学研究科情報システム学専攻
†Department of Information Systems, Interdisciplinary Graduate school of Engineering Science, Kyushu University
‡九州大学理学部附属基礎情報学研究施設
§Research Institute of Fundamental Information Science, Kyushu University

2 セルオートマトン

2.1 有限セルオートマトン

定義 1 集合 $I=\{1,2,\cdots,m\}$ をセルの集合とするとき n 次元ベクトル空間 $\{0,1\}^m$ を様相空間という．様相空間のベクトル $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t))\in\{0,1\}^m$ を時刻 t における様相という．

- 時刻 t は 0 以上の整数値をとる．
- 様相 $(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t))$を$x_1(t)x_2(t)\cdots x_m(t)$ と書くこともある．

2.2 3近傍局所遷移規則と境界条件

定義 2 写像 $f:\{0,1\}^3\rightarrow\{0,1\}$ を3近傍局所遷移写像 (規則) とする．
$f(x,y,z)=r_i$(ただし，$i=4x+2y+z$) とするとき，3近傍局所遷移写像 f の規則番号 R を次で定義する．

$$R=2^7r_7+2^6r_6+\cdots+2^0r_0$$

- 3近傍局所遷移写像 f の規則番号が R で，セルの個数が m のセルオートマトンを $CA-R(m)$ で表す．

定義 3 $CA-R(m)$ の大域遷移写像 $\delta:\{0,1\}^m\rightarrow\{0,1\}^m$ は次で定義される．

$$x(t+1)=\delta(x(t))=(f(x_0(t),x_1(t),x_2(t)),\cdots,f(x_{m-1}(t),x_m(t),x_{m+1}(t)))$$

- 時刻 t を1進めることを1回の遷移と言う．

定義 4 x_0,x_{m+1} を境界といい，境界の決め方は次の5通り．

(0) $x_0=0,x_{m+1}=0$

(1) $x_0=0,x_{m+1}=1$

(2) $x_0=1,x_{m+1}=0$

(3) $x_0=1,x_{m+1}=1$

(4) $x_0=x_m,x_{m+1}=x_1$

(4) を巡回型境界条件，(0)~(3) をそれぞれ 0-0 型，0-1 型，1-0 型，1-1 型の固定型境界条件という．

2.3 リミットサイクルと transient length

定義 5 様相 $x \in \{0,1\}^m$ に対して, $\delta^s(x) = x$ となるような自然数 s が存在するとき x はリミットサイクルを構成する様相であると言う.

- $CA-R(m)$ のとり得る様相は 2^m 通りであるから, どのような初期様相からでも有限回の遷移で, ある状態を繰り返すようになる, すなわちリミットサイクルに収束する.

定義 6 $h(x)$ を様相 x が最初にリミットサイクルに入るまでに必要な最小遷移回数とするとき $CA-R(m)$ の transient length $H(m)$ を次で定義する.

$$H(m) = max\{h(x); x \in \{0,1\}^m\}$$

定義 7 $x \in \{0,1\}^m$ をあるリミットサイクルを構成する様相とする時そのリミットサイクルの周期 T を次で定義する.

$$T = min\{s \geq 1; \delta^s(x) = x\}$$

2.4 セルオートマトンの反転, 対称

定義 8 3近傍局所遷移写像 f の反転遷移写像 $\overline{f}$ を次のように定める.

$$\overline{f}(x, y, z) = 1 - f(1-x, 1-y, 1-z)$$

定義 9 3近傍局所遷移写像 f の対称遷移写像 f^T を次のように定める.

$$f^T(x, y, z) = f(z, y, x)$$

- 3近傍局所遷移写像 f の規則番号を R, $\overline{f}$ の規則番号を $\overline{R}$, f^T の規則番号を R^T とするとき, $CA-R(m)$と$CA-\overline{R}(m)$, $CA-R(m)$と$CA-R^T(m)$ は同一視できる. つまり, 反転規則の対称規則 (対称規則の反転規則) を $\overline{R^T}$ とすると, $CA-R(m), CA-\overline{R}(m), CA-R^T(m)$と$CA-\overline{R^T}(m)$ の4つは同一視できる.

3 解析結果

ここでは, 0-0 型有限セルオートマトンを２５６通りの遷移規則すべてについて, 計算機によって実際に遷移させてみた結果, 周期１と２のリミットサイクルを同時にもつと予想されるものに対して解析した結果のみを述べる. 以下の結果は, $\gamma_c(m)$ をセルサイズが m のときの周期 c のリミットサイクルの個数としたときの, それぞれの境界条件下での $\gamma_c(m)$ の値, または関係式（漸化式）である.

3.1 解析済み

<table>
<tr><th>規則番号</th><th colspan="2">0-0 型</th><th colspan="2">0-1 型</th><th colspan="2">1-0 型</th><th colspan="2">1-1 型</th></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>F_{23}</td><td>$*_1$</td><td>F_{23}</td><td>$*_1$</td><td>F_{23}</td><td>$*_1$</td><td>F_{23}</td><td>$*_1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7</td><td>1</td><td>$[\frac{m}{2}]$</td><td>0/1</td><td>$[\frac{m+1}{2}]$</td><td>1</td><td>$[\frac{m-1}{2}]$</td><td>1</td><td>$[\frac{m}{2}]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$2(m-3)+1$</td><td colspan="2">$2(m-2)$</td><td colspan="2">$2(m-3)$</td><td colspan="2">$2(m-2)-1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">23</td><td>1/0</td><td>F_{12}</td><td>0/1</td><td>F_{12}</td><td>0/1</td><td>F_{12}</td><td>1/0</td><td>F_{12}</td></tr>
<tr><td colspan="2">$2[\frac{m}{2}]-1$</td><td colspan="2">$2[\frac{m-1}{2}]$</td><td colspan="2">$2[\frac{m-1}{2}]$</td><td colspan="2">$2[\frac{m}{2}]-1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">29</td><td>1</td><td>F_{123}^{+1}</td><td>2</td><td>F_{123}^{+2}</td><td>0/1</td><td>$F_{123}^{+1/0}$</td><td>1</td><td>F_{123}^{+1}</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">50</td><td>1</td><td>F_{12}</td><td>0</td><td>F_{12}</td><td>0</td><td>F_{12}</td><td>0</td><td>F_{12}</td></tr>
<tr><td colspan="2">$m-1$</td><td colspan="2">m</td><td colspan="2">m</td><td colspan="2">$[\frac{m+1}{2}]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">108</td><td>F_{134}</td><td>$*_2$</td><td>F_{134}</td><td>$*_2$</td><td>F_{134}</td><td>$*_2$</td><td>F_{134}</td><td>$*_2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">156</td><td>$[\frac{m+1}{2}]+1$</td><td>$*_3+0/1$</td><td>$*_4$</td><td>$*_4$</td><td>0/1</td><td>$*_5$</td><td>$[\frac{m+3}{2}]$</td><td>$*_3+0/1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$2[\frac{m-1}{2}]$</td><td colspan="2">$2[\frac{m-2}{2}]$</td><td colspan="2">$2[\frac{m}{2}]$</td><td colspan="2">$2[\frac{m-1}{2}]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">157</td><td>1</td><td>$*_3$</td><td>$m+1$</td><td>$*_3+1$</td><td>0/1</td><td>$*_7$</td><td>$[\frac{m+3}{2}]$</td><td>$*_3+0/1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$2[\frac{m+1}{2}]-1$</td><td colspan="2">$2[\frac{m-2}{2}]+1$</td><td colspan="2">$2[\frac{m}{2}]+1$</td><td colspan="2">$2[\frac{m+1}{2}]-1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">178</td><td>1</td><td>F_{12}</td><td>0</td><td>F_{12}</td><td>0</td><td>F_{12}</td><td>1</td><td>F_{12}</td></tr>
<tr><td colspan="2">$m-2$</td><td colspan="2">$m-1$</td><td colspan="2">$m-1$</td><td colspan="2">$m-2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">186</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">$m-1$</td><td colspan="2">m</td><td colspan="2">$m-1$</td><td colspan="2">m</td></tr>
<tr><td rowspan="2">250</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">$m-2$</td><td colspan="2">m</td><td colspan="2">m</td><td colspan="2">$[\frac{m+1}{2}]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">251</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">$m-1$</td><td colspan="2">m</td><td colspan="2">m</td><td colspan="2">$[\frac{m+1}{2}]$</td></tr>
</table>

(注)

各規則番号，境界条件に対し

<table>
<tr><td>1-cycle の個数</td><td>2-cycle の個数</td></tr>
<tr><td colspan="2">transient length</td></tr>
</table>

を表す．

a/b : mが奇数の時a，偶数の時b

$$F_{23}: \gamma_2(m) = \gamma_2(m-2) + \gamma_2(m-3)$$
$$F_{12}: \gamma_2(m) = \gamma_2(m-1) + \gamma_2(m-2) +$$
$$F_{123}^{+c}: \gamma_2(m) = \gamma_2(m-1) + \gamma_2(m-2) + \gamma_2(m-3) + c$$
$$F_{134}: \gamma_1(m) = \gamma_1(m-1) + \gamma_1(m-3) + \gamma_1(m-4)$$
$$*_1: \gamma_2(m) = \gamma_2(m-1) + \gamma_2(m-2) + \gamma_2(m-3) - \gamma_2(m-4) + \gamma_2(m-5) - \gamma_2(m-6) + \gamma_1(m-5)$$
$$*_2: \gamma_2(m) = \gamma_2(m-1) + \gamma_2(m-2) + \gamma_2(m-4) + \gamma_2(m-5) - \gamma_2(m-6) + \gamma_1(m-5)$$
$$*_3: \gamma_2(m) = \gamma_2(m-1) + \gamma_2(m-2) + \gamma_2(m-3) - 2\gamma_2(m-4)$$
$$*_4: \gamma_1(m) = \gamma_1(m-1) + \gamma_1(m-2) - \gamma_1(m-3) + 1$$
$$*_5: \gamma_2(m) = 2\gamma_2(m-1) - 3\gamma_2(m-4) + 2\gamma_2(m-5)$$
$$*_6: \gamma_2(m) = \gamma_2(m-1) + \gamma_2(m-3) + \gamma_1(m-3)$$
$$*_7: \gamma_2(m) = 2\gamma_2(m-2) + 2\gamma_2(m-3) - \gamma_2(m-4) - 2\gamma_2(m-5)$$

3.2 未解析

ここでは，解析が済んでいない 0-0 型のセルオートマトンに対して，計算機によるシミュレーションの結果のみを述べる．

規則番号	$1-cycle$	$2-cycle$	$tran.len.$
30	1/2	1/0	$\leq 4m$
58	1	1	?
203	F_{13}	F_{13}	$3[\frac{m+1}{3}]$
233	f_{14}	1/0	?

4 最後に

今後の課題として，未解析のものを解析するということと，ある遷移規則に対してといった局所的なものではなく，もっと大域的に，例えば Shingai の定理 [4] のような，一般的な遷移規則に対して論じることができればと思っている．

参考文献

[1] M.Harao and S.Noguchi: *On some dynamical properties of finite cellular automaton*, IEEE Trans. Comput.C-27(1978)42.

[2] Y.Kawahara,S.kumamoto,Y.Mizoguchi,M.Nohmi, H.Ohtuka and T.Shoudai: *Period lengths of cellular automata on square lattices with rule 90*, To appear in J.Math.Phys.36(3),March 1995

[3] H.Lee and Y.Kawahara: *On dynamical behaviors of cellular automata CA-60*, Bull.Informatics and Cybernetics 25,22-27,1992

[4] Shingai,R.:*TheMaximum Period Realized in 1-D Uniform Neural Networks*, Trans.IECE,Japan, E61,1978,804-808

[5] 井口修一，河原康雄: セルオートマトン *CA-108* の挙動について，電気関係学会九州支部連合大会公演論文集 (1994),897